Hermitian Hurwitz 対の相対論的なDirac型の方程式(場の理論の基礎的諸問題)

鈴木, 理

数理解析研究所講究録
869巻 1994年 40-51

Hermitian Hurwitz 対と相対論的なDirac型の方程式

日大・文理 鈴木 理(Osamu SUZUKI)

《要約》 Hermitian Hurwitz 対という概念を導入し，その数学的な考察をのべ，場の理論への応用をのべる。数学的には，或る特殊な表現をもつクリフォード代数を考察することであり，物理的には不定計量に関する自己随伴性をもったディラック型の方程式を決定することであるといえる。このとき時空間の次元及び符号数に一定の制限が入ることが分かる。特に時空間の次元が4のとき，双対定理による同一視を行うと，本質的にミンコフスキー空間になることが示される。

《内容》

§1. 序

我々の時空間の次元及びその符号数については，物理的根拠のちがいにより様々にのべられている。ひとつにはミンコフスキー空間であるといわれ，その符号数は(1,3)或は(3,1)であるといわれる。又，string理論の立場からは26次元，或は10時元であるともいわれその符号数は(1,25)或は(1,9)であるといわれる。ここでは数論にあらわれる"Hurwitz対"を用いて，この時空間の符号数がどの様に規制するかをのべてみる。Hurwitz対は，実数体，複素数体，四元数体，八元数体の特徴づけやラグランジュの定理(すべての自然数は4つの自然数の平方和としてあらわされるという定理)と関係して1898年にHurwitzが導入した概念である([3])．ここではこれを一般化した"Hermitian Hurwitz対"を考えることにより，これが時空間の符号数と関係していることをのべる。この立場での予言は，はなはだ弱いものであるが，次の様にのべることができる:

(1) 時空間の符号数は$(p-1, q)$或は$(q-1, p)$となる，但し，$(p, q) \notin$ (odd, odd)でなくてはならない。

(2) 時空間の次元を4とすると，(1,3)，(3,1)，(2,2)，(0,4)がすべて可能であるが，あとでのべる双対定理を用いると(1,3)$\Leftrightarrow$(3,1)，(1,3)$\Leftrightarrow$(2,2)，(3,1)$\Leftrightarrow$(0,4)となり，本質的には1種類となる。

（注意）(1,3)⇔(2,2) は，ミンコフスキー空間の場の理論とペンローズ理論による場の理論の変換理論と考えられる([5])。

§2. Hermitian Hurwitz 対とその双対定理

ここでは Hermitian Hurwitz 対の定義をのべその双対定理についてのべる。

$\mathbb{C}^n(I_{r,s})$ $(r+s=n)$ を符号数が (r,s) となるへルミート計量をもつベクトル空間とする。その不定内積を $\langle x,y\rangle = x^* I_{r,s}\, y$ $(x,y\in\mathbb{C}^n)$ とする。同様に $\mathbb{R}^m(I_{p,q})$ $(p+q=m)$ を $\langle u,v\rangle = {}^t u\, I_{p,q}\, v$ を不定内積とする実ベクトル空間とする。

$(\mathbb{C}^n(I_{r,s}), \mathbb{R}^m(I_{p,q}))$ が **Hermitian Hurwitz 対**である（以下，H.H.P. とかく）とは，次の条件をみたす双線形写像 $f:\mathbb{R}^m\times\mathbb{C}^n\longrightarrow\mathbb{C}^n$ があることとする：

(1) **(Hurwitz 条件)** $\langle f(x,y), f(x,y)\rangle = \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$
$(x\in\mathbb{R}^m,\ y\in\mathbb{C}^n)$ がなりたつ

(2) **(既約性)** $f|_{\mathbb{R}^m\times V}: \mathbb{R}^m\times V\longrightarrow V$ となる部分空間
$(\{0\}\subsetneqq V\subsetneqq\mathbb{C}^n)$ が存在しない。

H.H.P. は特殊な表現をもつクリフォード代数と関係している。

$\{\varepsilon_\alpha\}_{\alpha=1,2,\cdots,m}$ を $\mathbb{R}^m$ の，$\{e_j\}_{j=1,2,\cdots,n}$ を $\mathbb{C}^n$ の標準座標とする。

$$f(\varepsilon_\alpha, e_j) = \sum_{k=1}^{n} C_{\alpha j}^{k} e_k$$

とおくと行列 $C_\alpha\ (\in M_n(\mathbb{C}))\ (\alpha=1,2,\cdots,m)$ が得られる。

Hurwitz 条件は

$$C_\alpha^{\#} C_\beta + C_\beta^{\#} C_\alpha = 2\eta_{\alpha\beta} I_n \ , \quad (\eta_{\alpha\beta}) = I_{p.q}$$

とあらわされる。ここで $C^{\#} = I_{r,s} C^{*} I_{r,s}$ である。

$$S_\alpha^{(\rho)} = i\, C_\rho^{-1} C_\alpha \qquad \alpha = 1,2,\cdots,\check{\rho},\cdots,m$$

とおくと Hurwitz 条件は

$$\text{(i)}\quad S_\alpha^{(\rho)} S_\beta^{(\rho)} + S_\beta^{(\rho)} S_\alpha^{(\rho)} = \eta_{\alpha\beta}\eta_{\rho\rho} I_n$$

$$\text{(ii)}\quad S_\alpha^{(\rho)\#} = S_\alpha^{(\rho)}$$

と同等になる。従って，H.H.P. を求める問題は，特殊な表現(ii)をもつクリフォード代数を求めることに帰される。この様な特殊な表現をもつクリフォード代数を"**Hurwitz 代数**"ということにする。符号数$(p.q)$の線形空間から決まる Hurwitz 代数を $\mathcal{H}_{p.q}$ とかく。以下，Hurwitz 代数というとき，既約である，すなわち $\mathcal{H}_{p.q}' = \{c\, I\}$ と仮定する。

ここで重要な注意をする。これが，双対定理が考えられる基礎となるからである。1つの H.H.P. に対して，2種類の Hurwitz 代数が $\eta_{\rho\rho} = 1$，$\eta_{\rho\rho} = -1$ により定義される。

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & (\mathbb{C}^n(I_{r,s}), \mathbb{R}^m(I_{p,q})) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathcal{H}_{p-1,q} & & \mathcal{H}_{q-1,p} \end{tikzcd}$$

次の定理がなりたつ([2])：

定理 I. $(\mathbb{C}^n(I_{r,s}), \mathbb{R}^m(I_{p,q}))$ が H.H.P. になる

$\Longleftrightarrow$ $(p, q) \notin (\mathrm{odd}, \mathrm{odd})$ であり，このとき

$$n = 2^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}, \quad r = s = \frac{n}{2}$$ となる。

次に双対定理についてのべる。$(\mathbb{C}^n(I_{r,s}), \mathbb{R}^m(I_{p,q}))$ を H.H.P. とする。

$$\mathfrak{A} = \{ C_\alpha^\# C_\beta \ (\alpha \leqq \beta) \text{ から生成される\#-代数} \}$$

$\mathfrak{A}\,(\subset M_n(\mathbb{C}))$ とする。$\mathfrak{A} \otimes \mathbb{C}$ を同じ記号 $\mathfrak{A}$ であらわす。$\mathfrak{A}$ の元は I_n 及び $C_{\alpha_1}^\# C_{\beta_1} \cdots C_{\alpha_k}^\# C_{\beta_k}$ $(\alpha_1 < \beta_1 < \cdots < \alpha_k < \beta_k)$ $(k = 1, 2, \cdots, m)$ の線形一次結合としてあらわされる。$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{n} \mathrm{Tr}(X^\# Y)$ $(X, Y \in \mathfrak{A})$ とおくと，上の基底は正規直交底になっている。次の事柄がなりたつ：

定理 II (1)**(Wick duality).** 次の条件をみたす#-線形同型が存在する：

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathfrak{A} \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\alpha'"] & \\ \mathcal{H}_{p-1,q} \arrow[rr, "\gamma"] & & \mathcal{H}_{q-1,p} \end{tikzcd}$$

(i) α, α', γ は#-線形同形である

(ii) 図式を可換にする。

(2) **(space-time duality)** $(p,q)\in(\mathrm{odd},\mathrm{odd})$とする。
$(\mathbb{C}^n(I_{r,s}),\ \mathbb{R}^m(I_{p+1,q+1}))$が H.H.P. のとき,

$$\mathfrak{A}'_{p,q}=\{C_1^{\#}C_\alpha\ (\alpha=2,\cdots,p+q+1)\text{より生成される}\mathfrak{A}\text{の部分代数}\}$$

$$\mathfrak{A}'_{q,p}=\{C_{p+q+2}^{\#}C_\alpha\ (\alpha=2,\cdots,p+q+1)\ \text{〃}\}$$

とおくと,

$$\begin{array}{ccc}\mathfrak{A}'_{p,q} & \xrightarrow{\delta} & \mathfrak{A}'_{q,p}\\ \alpha\downarrow & & \downarrow\alpha'\\ \mathcal{H}_{p,q} & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{H}_{q,p}\end{array}$$

左図を可換にする#-線形同形δが存在する。α,α',γは(1)で与えられた同形である。

§3 Dirac型の方程式とその双対定理

ここでは Dirac型の方程式による H.H.P. の特徴づけを与えその解空間になりたつ双対定理をのべる。

$$C_0^\infty(m,n)=\{\varphi:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{C}^n\mid C^\infty\text{-写像},\ \mathrm{support}\,\varphi\text{ は compact}\}$$

$$\mathcal{A}_U(m,n)=\{\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}^n\mid \text{real analytic 写像},\ U\subset\mathbb{R}^m\}$$

とおく。$\mathbb{R}^m$の座標を$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$とする。

$$D:C_0^\infty(m,n)\longrightarrow C_0^\infty(m,n)$$

$$D=\sum iS_\alpha\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\quad(S_\alpha\in M_n(\mathbb{C}),\ \alpha=1,2,\cdots,m)$$

をDirac型の演算子という。次に$\mathbb{C}^n(I_{r,s})$ $(r+s=m)$をHermite不定内積空間として,

$$\langle\varphi,\psi\rangle=\int_{\mathbb{R}^m}\varphi^* I_{r,s}\psi\, d^s v \quad (\varphi,\psi\in C_0^\infty(m,n))$$

とおき, $\langle D\varphi,\psi\rangle=\langle\varphi,D^\#\psi\rangle$により形式的随伴作用素を定める。

$$D^\#=\sum i S_\alpha^\# \frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}$$

となる。

H.H.P.はDirac型の方程式を用いて特長づけられる:

定理 III $S_\alpha\in M_n(\mathbb{C})(\alpha=1,2,\cdots,m-1)$, $S_m=I_n\in M_n(\mathbb{C})$ とするとき, 次の2つは同値である:

(i) $f:\mathbb{R}^m\times\mathbb{C}^n\longrightarrow\mathbb{C}^n$, $f=\sum_{\alpha=1}^m \xi_\alpha S_\alpha$ がHurwitz条件をみたす,

(ii) $D=\sum_{\alpha=1}^m iS_\alpha\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}$ が次の(1), (2)をみたす:

(1) $D^\#=D$, (2) $D^2=\sum_{\alpha=1}^m \eta_{\alpha\alpha}\frac{\partial^2}{\partial\xi_\alpha^2}\otimes I_n$

そこでH.H.P.に付随するDirac型の作用素を定める:

$(\mathbb{C}^n(I_{r,s}),\mathbb{R}^m(I_{p,q}))$ の Hurwitz 代数の生成元を $S_\alpha^{(\rho)}(\alpha=1,\cdots,\check{\rho},\cdots m)$とする。

$$F^{(\rho)}=\sum_{\alpha=1}^m iS_\alpha^{(\rho)}\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha} \quad (S_\rho^{(\rho)}=I_n)$$

$$D^{(\rho)}=\sum_{\alpha\neq m} iS_\alpha^{(\rho)}\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}$$

を H.H.P. に付随する Fueter 型の演算子, Dirac 型の演算子という。ρ のとり方により $F_{p-1,q}$, $F_{q-1,p}$ 或は $D_{p-1,q}$, $D_{q-1,p}$ と書く。

次に低次元の Dirac 型の方程式を挙げる。

(1) $(\mathbb{C}^2(I_{1,1}),\ \mathbb{R}^3(I_{1,2}))$

$$\mathcal{H}_{1,1}:\quad S_2^{(1)} = i\sigma_1 \qquad S_3^{(1)} = \sigma_3$$

$$\mathcal{H}_{0,2}:\quad S_1^{(3)} = i\sigma_1,\quad S_2^{(3)} = i\sigma_2$$

$$D_{1,1}\psi = 0 \iff i\sigma_1\frac{\partial\psi}{\partial\xi_2} - \sigma_3\frac{\partial\psi}{\partial\xi_3} = 0 \quad \text{(Neveu-Schwartz)}$$

$$D_{0,2}\psi = 0 \iff -i\sigma_1\frac{\partial\psi}{\partial\xi_1} - i\sigma_2\frac{\partial\psi}{\partial\xi_2} = 0 \quad \text{(Cauchy-Riemann)}$$

(2) $(\mathbb{C}^4(I_{2,2}),\ \mathbb{R}^5(I_{2,3}))$

$$\mathcal{H}_{1,3}:\quad S_2^{(1)} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},\ S_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix},\ S_4^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix},\ S_5^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}_{2,2}:\quad S_1^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix},\ S_2^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_3 \\ i\sigma_3 & 0 \end{pmatrix},\ S_3^{(5)} = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix},\ S_4^{(5)} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$$D_{1,3}\psi = 0 \quad \text{(Minkowski 空間(1,3)の Dirac 方程式)}$$

$$D_{2,2}\psi = 0 \quad \text{((2,2)-空間の Dirac 方程式)}$$

(注意) この様に1つの H.H.P. より2種類のディラック型の方程式が定義されることは注目に値する。

次に双対定理をのべる:

$$\mathcal{S}_{p,q}^{D}(U:m,n) = \{\psi \in \mathcal{A}_U(m,n) \mid D_{p,q}\psi = 0\}$$

$$\mathcal{S}_{p,q}^{F}(U:m,n) = \{\psi \in \mathcal{A}_U(m,n) \mid F_{p,q}\psi = 0\}$$

(2) $(\mathbb{C}^4(I_{2,2}), \mathbb{R}^5(I_{2,3}))$の場合：このとき，Dirac型の方程式は，$D_{1,3}\Psi=0$，$D_{2,2}\Psi=0$である。ここでは各々の場合について Weyl型の方程式を対応させて考える：

(i) $D_{1,3}\Psi^{(1)}=0$，　$\sum_{\alpha=2}^{5} i S_\alpha^{(1)} \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial \xi_\alpha^{(1)}}=0$ に対して，

$$\begin{cases} D_+^{(1)}\varphi_+^{(1)}=0, & D_+^{(1)} = I_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2^{(1)}} + \sum_{\alpha=3}^{5} \sigma_{\alpha-2} \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha^{(1)}} \\ D_-^{(\;)}\varphi_-^{(1)}=0, & D_-^{(1)} = I_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2^{(1)}} - \sum_{\alpha=3}^{5} \sigma_{\alpha-2} \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha^{(1)}} \end{cases}$$

を考える。以下，$W_\pm^{(1)}(U)=\{\varphi_\pm^{(1)} \in \mathcal{A}(U:4,2) \mid D_\pm^{(1)}\varphi_\pm^{(1)}=0\}$ とおく。

(ii) $D_{2,2}\Psi^{(5)}=0$，　$\sum_{\alpha=1}^{4} i S_\alpha^{(5)} \frac{\partial \Psi^{(5)}}{\partial \xi_\alpha}=0$ に対して，

$$\begin{cases} D_+^{(5)}\varphi_+^{(5)}=0, & D_+^{(5)} = I_2 \frac{\partial}{\partial \xi_4^{(5)}} + i\sigma_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3^{(5)}} + \sigma_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2^{(5)}} + \sigma_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1^{(5)}} \\ D_-^{(5)}\varphi_-^{(5)}=0, & D_-^{(5)} = I_2 \frac{\partial}{\partial \xi_4^{(5)}} - i\sigma_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3^{(5)}} - \sigma_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2^{(5)}} - \sigma_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1^{(5)}} \end{cases}$$

を考える。同様に $W_\pm^{(5)}(U)$ を定める。

次にWick回転を次の様に定める：

$$w_{(5)}^{(1)}: \ \xi_4^{(5)}=\xi_2^{(1)},\ \ \xi_3^{(5)}=-i\,\xi_5^{(1)},\ \ \xi_2^{(5)}=\xi_4^{(1)},\ \ \xi_1^{(5)}=\xi_3^{(1)}$$

$$w_{(5)}^{(1)}: \mathbb{C}^4(\xi_2^{(1)}, \xi_3^{(1)}, \xi_4^{(1)}, \xi_5^{(1)}) \longrightarrow \mathbb{C}^4(\xi_1^{(5)}, \xi_2^{(5)}, \xi_3^{(5)}, \xi_4^{(5)})$$

前の双対定理を用いると,

定理 IV 次の線形同型 (i)〜(iii):

(i) $\mathcal{S}^F_{p-1,q}(U;m,n) \cong \mathcal{S}^F_{q-1,p}(U:m,n)$ ($(p,q) \notin (\mathrm{odd},\mathrm{odd})$)

(ii) $\mathcal{S}^D_{p,q}(U:m,n) \cong \mathcal{S}^D_{q,p}(U:m,n)$ ($(p,q) \in (\mathrm{odd},\mathrm{odd})$)

(iii) $\mathcal{S}^D_{p,q}(U:m,n) \cong \mathcal{S}^F_{p-1,q}(U:m,n) \oplus \mathcal{S}^F_{p-1,q}(U:m,n)$
($(p-1,q) \in (\mathrm{even},\mathrm{odd})$)

がなりたつ。

(注意) (iii)はDirac型方程式のWeyl型方程式への分解一般化をあらわす。

§4 Wick回転と双対定理

定理II, (1)で与えた双対写像 $\gamma: \mathcal{H}_{p-1,q} \longrightarrow \mathcal{H}_{q-1,p}$ がWick回転に他ならない事を低次元のH.H.P.について示す。以下H.H.P., $(\mathbb{C}^n(I_{r,s}), \mathbb{R}^m(I_{p,q}))$にあらわれる実空間$\mathbb{R}^m$の座標を複素化して考える。

(1) $(\mathbb{C}^2(I_{1,1}), \mathbb{R}^3(I_{1,2}))$の場合: このとき, $\mathcal{H}_{1,1}$と$\mathcal{H}_{0,2}$の生成元の形をみると. $\xi_2 \to i\xi_2$, $\xi_1 \to \xi_3$ により $\mathcal{S}_{1,1}(U,2,2)$と$\mathcal{S}_{0,2}(U:2,2)$とが同型になっている。従って $\gamma: \mathcal{H}_{1,1} \simeq \mathcal{H}_{0,2}$ はWick回転と考えることができる。

このとき，次の定理がなりたつ：

定理 V

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{S}^{(1)}_{1,3}(U) \arrow[r, "\gamma^{(1)}_{(5)}"] \arrow[d, "\alpha^{(1)}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathcal{S}^{(5)}_{2,2}(U) \arrow[d, "\alpha^{(5)}"] \\
W^{(1)}_{+}(U) \oplus W^{(1)}_{-}(U) \arrow[r, "W^{(1)*}_{(5)}"] & W^{(5)}_{+}(U) \oplus W^{(5)}_{-}(U)
\end{tikzcd}
$$

となる同型対応，$\gamma^{(1)}_{(5)}$，$w^{(1)}_{(5)}$，$\alpha^{(1)}$，$\alpha^{(5)}$ が存在する。ここで $w^{(1)*}_{(5)}$ は $w^{(1)}_{(5)}$ より定義される同型である。

従って，以上の H.H.P の場合は duality mapping γ は Wick 回転と考えてよい。一般の場合に同様な理解がなりたつかどうかは筆者は知らない。

（注意）上の同型は Penrose の twistor－理論がどうしてミンコフスキー空間の場の理論を与えるかの理解を与える。Penrose－理論は $(++,--)$－空間の理論と考えると都合がよい（[1]，[5]）。

《引用文献》

[1] Atiyah, F.: Geometry of Y.M. Fields, Pisa, 1979

[2] Furuoya, I., Kanemaki, S., Ławrynowicz, J., and Suzuki, O. : Hermitian Hurwitz pairs, to appear on Deformation of Mathematical Structure, ed. by J. Ławrynowicz in

[3] Hurwitz, A : Über die Komposition der quadratischen Formen von beliebigen vielen Variablen, Nachrichten von Königlichen Geselshaft der Wissenschaften zur Göttingen, Math.-Phys. Kl., 309~316 (1898)

[4] ——— : Über die Komposition der quadratischen Formen, Math. Ann. 88, 1-25 (1923)

[5] Ławrynowicz, J. and Suzuki, O. : The duality theorem for the Hurwitz pairs of bidiemension (8,5) and the Penrose theory